JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 2, 301–311 (1969)

Caracterisations d'espaces hilbertiens au moyen de la constante rectangle

J. L. JOLY

Université de Grenoble, Grenoble, France

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première, on donne la définition d'un nombre réel μ attaché à tout espace vectoriel normé réel et qu'on appelle la constante rectangle de l'espace pour indiquer qu'il dépend de la notion de pseudo-orthogonalité introduite par Birkhoff, dans les espaces normés.

N. Gastinel a été le premier à comprendre l'intérêt qu'il pourrait y avoir à étudier cette quantité dont il a donné la définition. Il faut ajouter que ce sont des considérations d'analyse numérique qui nous ont conduits à cette étude. Pour ces questions nous renvoyons à Gastinel–Joly [*7*].

La première question à propos de μ concerne l'intervalle dans lequel il prend ses valeurs et la deuxième partie de ce travail répond en partie à cet objectif. Ce nombre μ prend ces valeurs dans l'intervalle $[\sqrt{2}, 3]$ bornes comprises. La remarque importante c'est que d'être minimum pour μ est caractéristique des espaces préhilbertiens réels et séparés (que nous nommons hilbertiens dans la suite pour alléger l'écriture et ceci sans référence à une notion de complétion) dont la dimension est au moins égale à 3.

A ce sujet il est probable que la restriction sur la dimension de l'espace est superflue (cf. Remarque 1, §3) mais nous n'avons pas obtenu le résultat souhaité dans cette direction.

Pour terminer il faut ajouter que ces résultats ont été publiés sans démonstration sous forme d'une note aux Comptes-Rendus dans Joly [*9*].

Dans la troisième partie nous nous intéressons aux espaces normés de dimension infinie qui possèdent cette propriété que la constante rectangle reste constante sur l'ensemble des sous-espaces de dimension finie et fixée.

Cette propriété qui est vérifiée par les espaces hilbertiens est en fait caractéristique de cette structure hilbertienne. Ce résultat s'obtient comme une conséquence facile du théorème profond de Dvoretzky et est une forme légèrement affaiblie de la propriété conjecturée par Banach [*1*] citée et résolue dans Dvoretzky [*6*] et que nous rappelons au Paragraphe 4.

I. La Constante Rectangle

Soit E un espace vectoriel normé réel. On introduit sur E la relation de pseudo-orthogonalité étudiée par Birkhoff [*2*] et James [*8*].

DÉFINITION 1. Si x et x' sont deux éléments de E, on dit que x est pseudo-orthogonal à x'—ce qui est noté $x \perp x'$—lorsque pour tout réel λ l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|x + \lambda x'\| \geqslant \|x\|.$$

Remarque 1. Cette relation de pseudo-orthogonalité est homogène; c'est-à-dire que:

$$x \perp x' \Rightarrow \lambda x \perp \mu x', \quad \lambda, \quad \mu \in \mathbf{R}$$

mais n'est en général pas symétrique

$$x \perp x' \nRightarrow x' \perp x.$$

La Définition 1 étend la notion habituelle d'orthogonalité dans un espace hilbertien.

Si x et x' sont deux éléments quelconques de E il n'existe pas de nombre k indépendants de x et x' tel que:

$$\|x\| + \|x'\| \leqslant k\|x + x'\|.$$

Au contraire une telle majoration existe si on impose à x d'être pseudo-orthogonal à x', lorsque x et x' varient dans E.

DÉFINITION 2. Lorsque x est pseudo-orthogonal à x' dans E on pose:

$$\mu[x, x'] = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \frac{\|x\| + \|\lambda x'\|}{\|x + \lambda x'\|}$$

et

$$\mu(E) = \sup_{x \perp x'} \mu[x, x']$$

$\mu(E)$ s'appelle la *constante rectangle* de l'espace vectoriel normé E. Si A est un sous-espace vectoriel normé de E il est clair que $\mu(A) \leqslant \mu(E)$.

EXEMPLE 1. Si E est hilbertien, $\mu(E) = \sqrt{2}$.

EXEMPLE 2. Si pour E on considère l'espace des fonctions réelles continues définies sur $[0, 1]$, munie de la norme de la convergence uniforme on peut vérifier que $\mu = 3$.

EXEMPLE 3. Dans $\mathbf{R}^2$ on définit pour $p \in [0, 1]$ la norme:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$

Le graphe de $p \mapsto \mu(p)$, calculé en machine, semble indiquer que μ présente un minimun pour $p = 2$ et reste compris entre $\sqrt{2}$ et 3. On trouvera d'autres exemples et quelques propriétés générales de μ dans Gastinel–Joly [7].

II. Valeurs de la Constante Rectangle

Ce paragraphe est destiné à démontrer que la situation de l'Exemple 3 du paragraphe précédent est générale: à savoir que pour tout espace vectoriel normé réel E on a: $\sqrt{2} \leqslant \mu(E) \leqslant 3$.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel normé réel; alors*

$$\mu(E) \leqslant 3.$$

Démonstration. Soient x et x' dans E; supposons $x \perp x'$. Autrement dit:

$$\|x\| \leqslant \|x + \lambda x'\|, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Comme d'autre part:

$$\|\lambda x'\| \leqslant \|x + \lambda x'\| + \|x\|,$$

on a

$$\|\lambda x'\| \leqslant 2\|x + \lambda x'\|,$$

et par suite

$$\|x\| + \|\lambda x'\| \leqslant 3\|x + \lambda x'\|,$$

d'où le résultat.

Pour démontrer que $\mu(E) \geqslant \sqrt{2}$ la démarche est plus longue mais l'idée en est simple. Il est clair d'abord qu'on peut supposer que E est de dimension 2.

Nous verrons ensuite que dans un tel espace normé à deux dimensions on a l'inégalité

$$\inf_{\substack{x \perp x' \\ \|x\|=\|x'\|=1}} \|x + x'\| \leqslant \sqrt{2} \tag{1}$$

ce qui entraînera que μ dans cet espace est supérieur à $\sqrt{2}$.

Quant à l'Inegalité (1) elle découlera de la remarque que la valeur absolue de l'aire de la surface du plan balayée par le vecteur $x + x'$ lorsque x et x' vérifient

$$\begin{cases} \|x\| = \|x'\| = 1 \\ x \perp x' \end{cases}$$

est double de l'aire de la partie du plan constituée par les x tels que:

$$\|x\| \leqslant 1 \qquad \text{(boule unité de } E).$$

Introduisons quelques notations.

Soit P le plan vectoriel orienté (P' avec l'orientation opposée).

On considère dans P un ensemble B, convexe compact et admettant l'origine O du plan P pour point intérieur.

La frontière de B se note S.

A tout point m de S correspond l'ensemble (non vide) des droits d'appui à B en m. Soit D une de ces droites et D_1 la droite parallèle à D qui passe par l'origine, D_1 coupe S en deux points n et n', de telle sorte que le couple (n,m) soit direct dans P et (n',m) direct dans P'.

On définit $p = n + m$ et $p' = n' + m$. Ainsi, à tout point m de la frontière S de B correspondent les ensembles de points n et p puis n' et p' obtenus lorsque D parcourt l'ensemble des droits d'appui à B en m.

DÉFINITION. On note S_1 l'ensemble des points p et $S_1{}'$ l'ensemble des points p' associés à m, lorsque m parcourt S.

Le point m de S peut être défini par un couple de coordonnées m_1 et m_2 ou par une abscisse curviligne λ; on suppose que λ croît (λ est borné parceque S est rectifiable) lorsque m décrit S dans le sens direct.

Au point n de coordonnées n_1 et n_2 on associe l'angle θ ($0 \leqslant \theta < 2\pi$) que fait le vecteur n avec un axe origine préalablement choisi. On peut supposer que $\lambda = 0 \Rightarrow \theta = 0$, par exemple.

Parce que S n'est pas différentiable et peut contenir des segments de droites, il est clair que si θ ni λ ne peuvent séparément définir un paramètrage de S_1. En revanche, chaque point p de S_1 est associé biunivoquement à un couple (λ, θ) avec ($0 \leqslant \lambda < l$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ où l désigne la longueur de S).

L'ensemble de ces couples (λ, θ) dans le produit $[0, l[\times [0, 2\pi[$ est noté M. Comme B est un ensemble convexe, l'ensemble M est *monotone*, c'est-à-dire que:

$$(\theta_1 - \theta_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \geqslant 0.$$

Et on sait qu'alors toute parallèle à la seconde bissectrice coupe M en un seul point, c'est-à-dire que:

$$M \ni (\lambda, \theta) \mapsto \sigma = \lambda + \theta \in [0, 2\pi + l[$$

est une bijection bicontinue.

σ est un paramétrage de S_1 qui devient ainsi une *courbe fermée simple* du plan P. De plus comme:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \mapsto m_i(\lambda) \\ \\ \theta \mapsto n_i(\theta) \end{array}\right\} i = 1, 2$$

sont des fonctions à variation bornée (S est rectifiable) et que

$$\begin{array}{l} \sigma \mapsto \lambda, \\ \sigma \mapsto \theta, \end{array}$$

sont des fonctions croissantes et continues on en déduit que:

$$\sigma \mapsto p_i(\sigma) = m_i(\lambda) + n_i(\theta), \qquad i = 1, 2,$$

sont aussi des fonctions à variation bornée: S_1 est *rectifiable*.

LEMME. *Soit B_1 la partie de P intérieure à la courbe S_1; B_1 est quarrable et $\mathscr{A}(B_1)$ l'aire de B_1 vérifie:*

$$\mathscr{A}(B_1) = 2\mathscr{A}(B).$$

Démonstration. Comme S_1 est une courbe fermée simple, B_1 est bien définie (théorème de Jordan); L'aire de B_1 peut s'exprimer au moyen d'une intégrale de Stieljes

$$\mathscr{A}(B_1) = \tfrac{1}{2} \int_{S_1} p_2\, dp_1 - p_1\, dp_2$$

parce que S_1 est rectifiable.

En explicitant l'intégrale il vient:

$$\mathscr{A}(B_1) = \tfrac{1}{2} \int_{S_1} m_2\, dm_1 - m_1\, dm_2 + \tfrac{1}{2} \int_{S_1} n_2\, dn_1 - n_1\, dn_2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int_{S_1} m_2\, dn_1 - m_1\, dn_2 + \tfrac{1}{2} \int_{S_1} n_2\, dm_1 - n_1\, dm_2.$$

Chacun des deux premiers termes est égal à $\mathscr{A}(B)$. Après intégration par partie du troisième terme on a:

$$\mathscr{A}(B_1) = 2\mathscr{A}(B) + \int_{S_1} n_2\, dm_1 - n_1\, dm_2,$$

parceque S_1 est fermée.

Reprenons la définition de l'intégrale; à un découpage régulier de $[0, l + 2\pi]$ $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ auquel correspond une suite $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ on peut associer une suite $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ telle que:

$$n_2(\theta_i)(m_1(\lambda_{i+1}) - m_1(\lambda_i)) - n_1(\theta_i)(m_2(\lambda_{i+1}) - m_2(\lambda_i)) = 0.$$

La valeur du paramètre σ_i' correspondant à θ_i étant comprise entre σ_i et σ_{i+1}. Lorsque n tend vers l'infini ces sommes finies convergent vers la valeur de l'intégrale qui est donc nulle ce qui achève la démonstration.

Notons alors $B\sqrt{2}$ le convexe image du convexe B par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{2}$. On a évidemment:

$$\mathscr{A}(B\sqrt{2}) = 2\mathscr{A}(B).$$

Par suite, comme $S\sqrt{2}$ et S_1 sont des courbes fermées simples elles se coupent en au moins un point. En terme d'espace normé (de dimension 2) si B désigne la boule unité de l'espace, cette propriété s'écrit de la façon suivante:

PROPOSITION. *Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension* 2. *On a*:

$$\inf_{\substack{\|x\|=\|x'\|=1 \\ x \perp x'}} \|x + x'\| \leqslant \sqrt{2}$$

COROLLAIRE. *Si E est un espace vectoriel normé réel, sa constante rectangle vérifie*

$$\mu(E) \geqslant \sqrt{2}.$$

Démonstration. Soit en effet E_2 un sous espace vectoriel normé de dimension 2 de E. De $\mu(E) \geqslant \mu(E_2)$ et du corollaire suit que $\mu(E) \geqslant \sqrt{2}$.

III. Caracterisations d'Espace Hilbertien

Les considérations géométriques du paragraphe précédent vont nous permettre de caractériser les espaces vectoriels normés réels dont la norme est issue d'un produit scalaire; à savoir ceux pour lesquels $\mu = \sqrt{2}$. Nous serons en fait amené par l'utilisation d'un résultat qu'on trouve dans James [8] à faire une hypothèse sur la dimension des espaces, qui semble superflue (cf. Remarque ci-après) mais que nous n'avons pas été capables d'ôter.

En reprenant les notations du paragraphe 2 il est clair que si S_1' désigne la courbe homologue de la courbe S_1 lorsqu'on a changé l'orientation du plan, alors S_1' possède les mêmes propriétés que S_1 et en particulier on a:

$$\mathscr{A}(B_1') = \mathscr{A}(B_1) = 2\mathscr{A}(B).$$

Si donc E est un espace normé tel que $\mu(E) = \sqrt{2}$ alors tout sous-espace vectoriel normé E_2 de E vérifie:

$$\mu(E_2) = \sqrt{2},$$

et B sa boule unité possède nécessairement la propriété que:

$$B_1' = B_1 = B\sqrt{2}.$$

Nous allons montrer que ceci entraîne que la relation de pseudo-orthogonalité est symétrique dans E_2 et donc quelle est aussi symétrique dans E.

Proposition. *Soit B une partie convexe compacte et symétrique du plan P admettant l'origine de P pour point intérieur et telle que*:

$$B_1' = B_1 = B\sqrt{2}.$$

Alors m, n, p étant les points définis précédemment (cf. Définition §II) la droite joignant n à p est d'appui à B en n.

Démonstration. A $m \in S$ on associe $n, n' \in S$, $p \in S_1$, $p' \in S_1'$ (cf. §II. Def.). Considérons le parallèlogramme H admettant pour sommet les points p, p' et leur symétrique par rapport à l'origine.

Ce parallélogramme est inscrit dans le convexe $B\sqrt{2}$ à cause de l'hypothèse $B_1' = B_1 = B\sqrt{2}$ et parce que B est symétrique.

Par l'absurde, supposons que la droite joignant p à n ne soit pas d'appui à B en n, c'est-à-dire qu'il existe un point n_1 de cette droite sur S qui est différent de n et tel que l'intersection de cette droite et de S soit réduite à ces deux points. Sur S entre n_1 et n il existe un point n_2 $(\min(\lambda(n), \lambda(n_1)) \leqslant \lambda(n_2) \leqslant \max(\lambda(n), \lambda(n_1))$ tel qu' une droite d'appui à B en n_2 soit parallèle au côté de H contenant n. En se servant de la définition de S_1 et de S_1' on remarque alors qu'il existe un parallélogramme H_2 déduit de H par la translation $n\, n_2$ qui est aussi inscrit dans $B\sqrt{2}$, ce qui entraîne nécessairement que la droite portant n et n_2 est parallèle à l'un des côtés de H; ce qui est impossible, d'où le résultat.

Si le convexe B est la boule unité de E_2 ceci signifie que la relation de pseudo-orthogonalité est symétrique dans E_2. D'où la:

PROPOSITION. *Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension au moins égale à 3. Pour que la norme sur E soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que $\mu(E) = \sqrt{2}$.*

Démonstration. On utilise le résultat de James que l'on trouve dans James [8] ou dans Bourbaki [3], p. 144, Ex. 14: un espace vectoriel normé réel de dimension supérieure ou égale à 3 est un hilbert si et seulement si la relation de pseudo-orthogonalité y est symétrique.

Remarque 1. Pour un espace vectoriel normé réel, la propriété que $\mu = \sqrt{2}$ est strictement plus forte que celle qui dit que la pseudo-orthogonalité est symétrique. On démontre dans Gastinel–Joly [7] que la symétrie de la pseudo-orthoganalité entraîne seulement que $\mu \leqslant 2$ et cette valeur peut être atteinte; en particulier $\mathbf{R}^2$ muni de la norme:

$$\|x\| = \begin{cases} |x_1| + |x_2| & \text{si } x_1 x_2 \geqslant 0 \\ \max(|x_1|, |x_2|) & \text{si } x_1 x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

admet 2 pour valeur de la constante rectangle et on vérifie que la pseudo-orthogonalité y est symétrique. Il est donc naturel de se demander si la restriction sur la dimension de l'espace n'est pas superflue.

DÉFINITION. Avec les mêmes notations qu'au paragraphe I et pour p réel $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ posons:

$$\mu_p(E) = \sup_{x \perp x'} \frac{(\|x\|^p + \|x'\|^p)^{1/p}}{\|x + x'\|}$$

de telle sorte que $\mu_1(E) = \mu(E)$.

PROPOSITION. *Pour tout espace vectoriel normé réel E on a*:

$$\mu_p(E) \geqslant 2^{1/p - 1/2}$$

et E est hilbertien si et seulement si

$$\mu_p(E) = 2^{1/p - 1/2}$$

(*lorsque* $\dim E \geqslant 3$).

Démonstration. a et b étant deux scalaires positifs on sait que:

$$(a^p + b^p)^{1/p} \leqslant a + b \leqslant 2^{1-1/p}(a^p + b^p)^{1/p}$$

si dans cette expression on pose $a = \|x\|$, $b = \|x'\|$ on en déduit que

$$\mu_p(E) \geqslant 2^{1/p-1} \mu_1(E) \geqslant 2^{1/p-1/2}$$

ce qui prouve la première partie de la proposition. Supposons maintenant que:

$$\mu_p(E) = 2^{1/p-1/2}$$

c'est-à-dire que pour tous les couples (x, x') de points de E tels que:

$$\begin{cases} \|x\| = \|x'\| = 1 \\ x \perp x' \end{cases}$$

on ait l'inégalité

$$\frac{2^{1/p}}{\|x + x'\|} \leqslant 2^{1/p-1/2}.$$

Soit $\|x + x'\| \geqslant \sqrt{2}$; ce qui entraîne (cf. Paragraphe II) que $\mu(E) = \sqrt{2}$ c'est-à-dire que la norme sur E est issue d'un produit scalaire (pourvu que $\dim E \geqslant 3$). Comme réciproquement il est immédiat que pour un espace hilbertien $\mu_p = 2^{1/p-1/2}$ ceci achève la démonstration.

Remarque 2. Lorsque $p = 2$ on retrouve (à part la restriction sur la dimension) un résultat de Ohira [*10*].

IV. Le Theoreme de Dvoretzky et la Constante Rectangle

Le résultat de Dvorestzky (cf. Dvoretzky [*5*], [*6*]) lui a permis de résoudre la conjecture suivante de Banach (cf. Dvoretzky [*6*]: pour qu'un espace vectoriel normé réel E, de dimension infinie soit hilbertien il suffit que pour un entier k fixé ($k \geqslant 2$) tous les sous-espaces vectoriels normés de dimension k de E soient isométriques.

La remarque que nous nous proposons de faire consiste à montrer qu'on peut affaiblir un peu la condition en prouvant qu'il suffit qu'existe un entier ($k \geqslant 3$) tel que μ soit constant sur tous les sous-espaces vectoriels normés de dimension k de E.

Définition. Soient ϵ un réel positif, E et F deux espaces vectoriels normés réels. On dit que E et F sont *ϵ-isométriques* si

(a) E et F sont topologiquement isòmorphes;

(b) il existe un isomorphisme u: $E \to F$ tel que:

$$\|u\| \leqslant 1 + \epsilon$$

$$\|\bar{u}^1\| \leqslant 1 + \epsilon$$

isomorphisme qu'on appelle une ϵ-isométrie.

Un corollaire du résultat de Dvoretzky s'énonce de la façon suivante:

THÉORÈME. *Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension infinie. Pour tout ϵ strictement positif et tout entier k supérieur à 2 il existe un sous-espace vectoriel normé V de E qui est ϵ-isométrique à l'espace euclidien de dimension k.*

Duquel nous nous proposons de déduire le:

COROLLAIRE. *Un espace vectoriel normé réel E de dimension infinie est hilbertien si et seulement si il existe un entier k* ($k \geqslant 3$) *tel que pour tout V et W, sous-espace de E de dimension k,*

$$\mu(V) = \mu(W). \tag{1}$$

Démonstration. Que la condition soit nécessaire est évident. Réciproquement supposons que E vérifie (1) pour un entier $k \geqslant 3$.

Fixons un réel $\epsilon > 0$. A k et ϵ on sait qu'on peut faire correspondre un sous-espace V de E tel que V soit ϵ-isométrique à H, l'espace euclidien de dimension k.

Notons u, l'ϵ-isométrie de V sur H et soit $x \neq 0$ un point de V auquel on associe un des hyperplans P de V tels que:

$$x \perp P.$$

Soit $y = u(x)$ et $Q = u(P)$.

Q est un hyperplan fermé de H qui n'est pas orthogonal à y mais tel que:

$$\sigma(y, Q) = \frac{d(y, Q)}{\|y\|} \geqslant \frac{1}{(1+\epsilon)^2} \geqslant 1 - 2\epsilon.$$

Ce qui signifie que y est presque orthogonal à Q; plus précisément à tout $y' \in Q$ on peut faire correspondre un élément z de H, orthogonal à y, et tel que:

$$\begin{cases} \|z - y'\| \leqslant 2\sqrt{\epsilon}\|y'\| \\ \quad z \perp y. \end{cases} \tag{2}$$

Considérons maintenant un couple (x, x') de points de V tels que:

$$x \perp x'$$

$$\|x\| = 1.$$

Transformés par l'ϵ-isométrie u ces deux points sont notés:

$$y = u(x)$$

$$y' = u(x')$$

et il est facile de vérifier que:

$$\frac{\|x\| + \|x'\|}{\|x + x'\|} \leqslant (1+\epsilon)^2 \frac{\|y\| + \|y'\|}{\|y + y'\|}.$$

A y' faisons correspondre l'élément z de H qui vérifie (2).

On a alors:

$$\|y'\| \leqslant \|z'\| + 2\sqrt{\epsilon}\|y'\| \leqslant \|z'\| + 2\sqrt{\epsilon}(1+\epsilon)\|x'\|.$$

et

$$\|y+y'\| \geqslant |\|y+z\| - 2\sqrt{\epsilon}(1+\epsilon)\|x'\||.$$

Autrement dit:

$$\frac{\|x\| + \|x'\|}{\|x+x'\|} \leqslant (1+\epsilon)^2 \frac{\|y\| + \|z\| + 2\sqrt{\epsilon}(1+\epsilon)\|x'\|}{|\|y+z\| - 2\sqrt{\epsilon}(1+\epsilon)\|x'\||}.$$

Pour l'estimation de $\mu(V) = \sup_{x \perp x'} \frac{\|x\| + \|x'\|}{\|x+x'\|}$ on peut se limiter aux couples (x,x') tels que

$$\|x\| = 1$$

$$\|x'\| \leqslant \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

En effet posons $\|x'\| = \alpha$ on a

$$\frac{\|x\| + \|x'\|}{\|x+x'\|} \leqslant \frac{1+\alpha}{|\alpha - 1|}$$

et $\alpha \geqslant (\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$ entraîne que $(1+\alpha)/(\alpha-1) \leqslant \sqrt{2}$; or nous savons que $\mu(V) \geqslant \sqrt{2}$.

Mais cette majoration de $\|x'\|$ permet d'affirmer que:

$$\frac{\|x\| + \|x'\|}{\|x+x'\|} \leqslant K(\epsilon) \frac{\|y\| + \|z\|}{\|y+z\|} \leqslant K(\epsilon)\sqrt{2}$$

la fonction $\epsilon \mapsto K(\epsilon)$, indépendante de x et x' et de V étant telle que:

$$\lim_{\epsilon=0} K(\epsilon) = 1.$$

En résumé:

$$\mu(V) \leqslant K(\epsilon)\sqrt{2}$$

et ϵ positif étant arbitraire

$$\mu(V) \leqslant \sqrt{2}.$$

ce qui signifie que tous les sous vectoriels de dimension k de E sont euclidiens puisque vérifient $\mu =$ constante $(= \sqrt{2})$ par hypothèse.

On en déduit que tous les sous-espaces de dimension 2 sont euclidiens donc que E est hilbertien: cf., par exemple, Day [*4*].

BIBLIOGRAPHIE

1. S. BANACH, Théorie des opérations linéaires. Chelsea publishing Co. N.Y. 1955.

2. G. BIRKHOFF, Orthogonality in linear metric spaces. *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.

3. N. BOURBAKI, "Espaces vectoriels topologiques." Chap. 3–5. Hermann, Paris, 1964.

4. M. Day, "Normed Linear-Spaces." Springer Verlag, Berlin, 1962.
5. A. Dvoretzky, A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **45** (1959), 223–226.
6. A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces. Proc. of the International Symposium on linear spaces, Jerusalem (1960).
7. N. Gastinel and J. L. Joly, Condition numbers and the general projection method. (A paraître dans *Linear Algebra.*)
8. R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* **61** (1947), 265–292.
9. J. L. Joly, La constante rectangle d'un espace vectoriel normé. *Compte Rend. Acad. Sci Paris* **268** (1969), 36–38.
10. K. Hohira, *Kumamoto J. Sci. Série A*, **1** (1952), 23–26.